TENTAMEN DISCRETE STRUCTUREN

8-7-2011

Voorzie de in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal te behalen punten vermeld. ***Antwoorden dienen altijd van een motivatie te worden voorzien.*** *Succes!*

Opgave 1. (10 pt) Gegeven is een universele verzameling U.

a. Gebruik de verzamelingenalgebra om te bewijzen dat voor elk drietal deelverzamelingen A, B en C van U geldt: $\overline{(A \cup B) \cap C} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{C}$. Benoem de gebruikte regels.

b. Met $P(A)$ duiden we de machtsverzameling van een verzameling A aan. Stel $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Geef de verzameling A.

Opgave 2. (10 pt) Gegeven de verzameling $\Sigma = \{a, b, @\}$. In elk van de volgende gevallen wordt een string uit Σ^* gevolgd door een reguliere expressie over Σ. Geef voor elk van die gevallen aan of de string behoort tot de reguliere verzameling die correspondeert met de betreffende reguliere expressie:

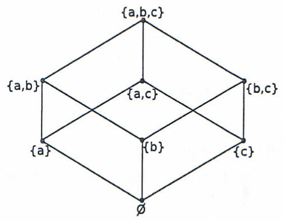
a. $a\,b\,@$ $\quad((a^*b) \vee @)^*$
b. $a\,b\,@\,b\,a\,@$ $\quad((a\,b\,@) \vee @)^*$
c. $a\,@\,a\,b\,a\,b$ $\quad(a\,b)^*a\,@$

Opgave 3. (10 pt) Bewijs met volledige inductie dat $n < 2^n$ voor alle gehele getallen $n \geqslant 1$.

Opgave 4. (10 pt) Laat $R = \{(1,3), (2,4), (3,2), (3,4)\}$ een relatie zijn op $A = \{1,2,3,4\}$.

a. Teken de graaf van R.
b. Geef domein en bereik van R.
c. Is R reflexief, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch?
d. Is de relatie R een functie?
e. Bepaal de kleinste equivalentierelatie die R bevat en teken de bijbehorende graaf.

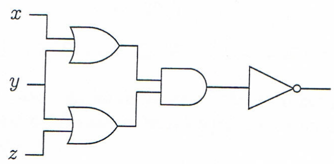
Opgave 5. (10 pt)
Stel $S = \{a, b, c\}$. In de figuur hiernaast is het Hasse diagram van de partiële ordening $\subseteq$ op de machtsverzameling $L = P(S)$ weergegeven.



a. Bewijs dat L een tralie is.
b. Het tralie L is begrensd. Leg uit waarom. Wat is het grootste element I en het kleinste element O ?
c. Geef een deeltralie van L bestaande uit 4 elementen.

(Verder op de volgende pagina)

Opgave 6. (10 pt)



a. Geef de Boolese expressie $p(x, y, z)$ die correspondeert met de uitvoer van het logische diagram hierboven.
b. Gebruik de regels van de Boolese algebra om de expressie p te herschrijven zodat een minimaal aantal variabelen en operaties wordt gebruikt. Teken het logische diagram van de nieuwe expressie.

Opgave 7. (10 pt) Gegeven is een gelabelde boom (T, v_0) met labels uit de verzameling $\{\times, \div, +, -, 1, 2, \ldots, 9\}$. Hierin zijn $\times, \div, +, -$ de gebruikelijke rekenkundige bewerkingen op de gehele getallen.

a. De expressie $\times\ -\ 4\ 2\ +\ 2\ \div\ 6\ 3$ is het resultaat van een *inorder* wandeling ("inorder search") door de boom T. Teken de bijbehorende boom, inclusief labels, en evalueer de expressie.
b. Elke binaire gelabelde boom waarvan de postorder wandeling de string WANDELING oplevert moet 9 knopen hebben. Wat hebben deze bomen verder gemeen?

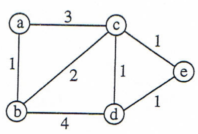
Opgave 8. (10 pt) Bekijk een verzameling $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. De *gelijkheidsrelatie* Δ op S is gedefineerd als:

$$\Delta = \{(s, s) \mid s \in S\}$$

a. Bewijs dat Δ *reflexief* is. Hoe ziet de bijbehorende matrix $\mathbf{M}_\Delta$ er uit?
b. Bewijs dat een relatie R op S reflexief is d.e.s.d.a. $\Delta \subseteq R$.
c. Hoe zien we aan de graaf G van een relatie R dat R reflexief is?
d. Als R reflexief is, is dan de symmetrische afsluiting $\mathrm{s}(R)$ ook reflexief? Zo ja, geef een bewijs, zo nee geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 9. (10 pt)

Bekijk de gewogen ongerichte graaf G in de figuur hiernaast; de geheeltallige gewichten van de kanten zijn aangegeven.



a. Bepaal alle minimale opspannende bomen van deze graaf volgens het algoritme van Prim, als gestart wordt bij knoop **a** (linksboven in de figuur). Geef ook aan in welke volgorde de kanten van elke minimale opspannende boom door dit algoritme worden opleverd.
b. Geef een aanpassing van het gewicht van precies één kant van de graaf G zodat de minimale opspannende boom uniek is.

Opgave 10. (10 pt) Bekijk een eindige samenhangende ongerichte graaf G.

a. Een pad in de graaf G waarin alle kanten precies één keer voorkomen, heet een *Euler-pad.* Als G precies twee knopen met een *oneven* graad bevat, heeft G een Euler pad. Bewijs dat voor een dergelijke graaf een Euler pad begint in een van de knopen van oneven graad en eindigt in de andere knoop van oneven graad.
b. Teken de volledige graaf K_4 met 4 knopen. Heeft K_4 een Euler pad? Zo nee, voeg een zo klein mogelijk aantal kanten toe zodat de nieuwe graaf K'_4 wel een Euler pad heeft, en teken K'_4. Verklaar je antwoorden.
c. Geef een correcte ("proper") kleuring van de graaf K_4 met een minimaal aantal kleuren.